9/11/2016.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της

α) Αν $a_n \to x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ τότε $a_{k_n} \to x$.

β) Αν $a_n \to +\infty$ τότε $a_{k_n} \to +\infty$

γ) Αν $a_n \to -\infty$ τότε $a_{k_n} \to -\infty$

Απόδειξη

α) Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον $a_n \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$
ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ (1)

Για κάθε $n \geq n_0$
έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$
άρα από την (1) $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$
επομένως $a_{k_n} \to x$

β) γ) ομοίως

Παρατήρηση
Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και βρούμε δυο υπακολουθίες της $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$

ώστε $a_{k_n} \to x$, $a_{l_n} \to y$
όπου $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ με $x \neq y$
Τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει όριο

Παραδείγματα

1) $a_n = (-1)^n$

Τότε $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$
$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \longrightarrow -1$

Άρα η (a_n) δεν έχει όριο

2) $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$b_{6n} = \cos\left(\frac{(6n)\pi}{3}\right)$

$= \cos(2n\pi) = 1$

$b_{6n+1} = \cos\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

Άρα η ακολουθία (b_n) δεν έχει όριο

Πρόταση
Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μονότονη υπακολουθία

Απόδειξη

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών
Λέμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παρουσιάζει σημείο κορυφής στο k αν για κάθε $m \geq k$ ισχύει $a_m \leq a_k$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

(i) Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρα σημεία κορυφής
Έστω $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
όλα τα σημεία κορυφής

Τότε $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq a_{k_3} \geq \dots \geq a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}} \geq \dots$
και άρα η υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα

(ii) Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένα σημεία κορυφής
Επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε το k_1 να είναι μεγαλύτερο από το μεγαλύτερο σημείο κορυφής.

Τότε το k_1 δεν είναι σημείο κορυφής
άρα υπάρχει $k_2 > k_1$
ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$

Εφόσον το k_2 δεν είναι σημείο κορυφής
υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$

Συνεχίζοντας με επαγωγή κατασκευάζουμε
$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$
ώστε $a_{k_1} < a_{k_2} < a_{k_3} < \dots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \dots$

Έτσι η (a_{k_n}) είναι (γνησίως) αύξουσα υπακολουθία της (a_n)

<u>Θεώρημα</u> (Bolzano-Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

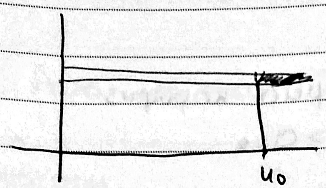
<u>Απόδειξη</u>

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση υπάρχει μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n). Η $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνουσα.

Βασικές ακολουθίες (ή ακολουθίες Cauchy)

Ορισμός Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy

αν για κάθε $\varepsilon>0$
υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$
με $n,m\geq n_0$ να ισχύει $|a_n-a_m|<\varepsilon$



Πρόταση
Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική.

Απόδειξη
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x\in\mathbb{R}$ με $a_n\to x$

Έστω $\varepsilon>0$
Εφόσον $a_n\to x$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$
ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $|a_n-x|<\varepsilon/2$
Τότε για κάθε $n,m\geq n_0$
$|a_n-a_m|\leq|a_n-x|+|x-a_m|<\varepsilon/2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
Τριγωνική ανισότητα βάζοντας το x
Επομένως η (a_n) είναι βασική.

Προταση

Καθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη

Αποδειξη

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθια. Εφαρμοζοντας τον ορισμό για $\varepsilon=1$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\geq n_0$ να ισχυει
$|a_n-a_m|<1$

Ετσι για κάθε $n\geq n_0$
Εχουμε $|a_n|\leq|a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}|<1+|a_{n_0}|$

Θετοντας $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{n_0-1}|,1+|a_{n_0}|\}$.
Εχουμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_n|\leq M$
άρα η (a_n) είναι φραγμένη.

Πρόταση

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία η οποία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (εστω $a_{k_n}\to x$)
Τότε η (a_n) είναι συγκλίνουσα με $a_n\to x$

Αποδειξη

Εστω $\varepsilon>0$
Εφόσον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$ με $n,m\geq n_1$ να ισχυει
$|a_n-a_m|<\varepsilon/2$
Εφόσον $a_{k_n}\to x$ υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_2$ να ισχύει $|a_{k_n}-x|<\frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

Έχουμε

$$|a_n - x| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - x|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$n \geq n_0 \geq n_1$

$k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$

Επομένως $a_n \to x$

Θεώρημα Κάθε βασική ακολουθία είναι συγκλίνουσα

Απόδειξη

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία

Σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση η (a_n) θα είναι φραγμένη

Από το Θεώρημα Bolzano Weierstass υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της (a_n) και $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a_{k_n} \to x$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $a_n \to x$ άρα η (a_n) είναι συγκλίνουσα

Παράδειγμα

Έστω $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Έτσι η ακολουθία (a_n) δεν είναι βασική άρα δεν είναι συγκλίνουσα

Εφόσον (a_n) αύξουσα προκύπτει $a_n \to +\infty$

Ασκήσεις 2ο Φυλλάδιο

Άσκηση 2

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ν.δ.ο. $\exists\, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια

$\exists\, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή

ώστε $f = g + h$

(+) η αναπαράσταση είναι μοναδική

Απόδειξη

Ορίζουμε $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

$h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$ άρα g άρτια

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = -\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$

άρα h περιττή

και προφανώς $g(x) + h(x) = f(x)$

Έστω τώρα $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
με G άρτια, H περιττή ώστε $f = G + H$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = G(x) + H(x)$

$f(-x) = G(-x) + H(-x) \Rightarrow f(-x) = G(x) - H(x)$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη.

$$\begin{cases} 2G(x) = f(x) + f(-x) \\ 2H(x) = f(x) - f(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ H(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

<u>Άσκηση 1</u>

$f : [0,1] \to [0,1] \qquad f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

f είναι 1-1

Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2}$$

$$\Rightarrow 1 - x_1 + x_2 - \cancel{x_1x_2} = 1 + x_1 - x_2 - \cancel{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x_2 = \cancel{2}x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Η f είναι επί

Έστω $y \in [0,1]$

Εξετάζουμε αν υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = y$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = y + yx$$

$$\Leftrightarrow 1-y = x + yx$$

$$\Leftrightarrow 1-y = x(1+y) \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$

που όντως ανήκει στο $[0,1]$

Επομένως η f είναι επί με $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$

Άσκηση 3

(a_n) $x \in \mathbb{R}$

Τ.Α.Ε.Ι. (i) $a_n \to x$ (δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|a_n - x| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ |a_n - x| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ |a_n - x| < 120\,\varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Απόδειξη

(i) ⇒ (ii) προφανώς

(ii) ⇒ (iii)

(iii) ⇒ (i) Έστω $\varepsilon > 0$ Θέτουμε $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{120} > 0$

Από την υπόθεση (iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - x| < 120\,\varepsilon_1 = \varepsilon$

Επομένως $a_n \to x$

Ασκηση 5

$$a_\nu = \frac{5+(-1)^\nu}{\nu}$$

$$0 \le |a_\nu| = \frac{|5+(-1)^\nu|}{\nu} \le \frac{5+1}{\nu} = \frac{6}{\nu}$$

$0 \downarrow 0$ $\qquad$ $\frac{6}{\nu} \downarrow 0$

Θ. ισοσ. ακολ.

$|a_\nu| \to 0$

$\Rightarrow a_\nu \to 0$

$$b_\nu = \sqrt{\nu^2+5\nu+2} - \sqrt{\nu^2+2\nu+5}$$

$$= \frac{(\nu^2+5\nu+2)-(\nu^2+2\nu+5)}{\sqrt{\nu^2+5\nu+2}+\sqrt{\nu^2+2\nu+5}} =$$

$$= \frac{3\nu-3}{\nu\sqrt{1+\frac{5}{\nu}+\frac{2}{\nu^2}}+\nu\sqrt{1+\frac{2}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}}} = \frac{3-\frac{1}{\nu}}{\sqrt{1+\frac{5}{\nu}+\frac{2}{\nu^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}}}$$

$\to 3/2$

$$\gamma_\nu = \frac{2\nu^3+1}{5\nu^4+\nu} + \frac{2\nu^3+2}{5\nu^4+(\nu-1)} + \dots + \frac{2\nu^3+(\nu-1)}{5\nu^4+2} + \frac{2\nu^3+\nu}{5\nu^4+1}$$

ν το πλήθος των κλασμάτων

$$\frac{2+\frac{1}{\nu^3}}{5+\frac{1}{\nu^3}} = \nu \cdot \frac{2\nu^3+1}{5\nu^4+\nu} \le \gamma_\nu \le \nu\,\frac{2\nu^3+\nu}{5\nu^4+1} = \frac{2+\frac{1}{\nu^2}}{5+\frac{1}{\nu^4}} \to \frac{2}{5}$$

$\downarrow 2/5$

Απο θ. ισοσ. ακολ. $\quad \gamma_\nu \to \frac{2}{5}$

$$\delta_\nu = \frac{7^\nu + 5^\nu}{4\cdot 7^\nu + 6^\nu} = \frac{1+\left(\frac{5}{7}\right)^\nu}{4+\left(\frac{6}{7}\right)^\nu} \to \frac{1}{4}$$

$\left(\frac{5}{7}\right)^\nu \to 0 \qquad -1 < \frac{5}{7} < 1$

$\left(\frac{6}{7}\right)^\nu \to 0 \qquad -1 < \frac{6}{7} < 1$

$$\zeta_\nu = \sqrt[\nu]{4^\nu + 6^\nu + 7\cdot 8^\nu + 10^\nu}$$

$$10 = \sqrt[\nu]{10^\nu} \le \zeta_\nu \le \sqrt[\nu]{10^\nu + 10^\nu + 7\cdot 10^\nu + 10^\nu}$$
$$= \sqrt[\nu]{10\cdot 10^\nu} = \sqrt[\nu]{10}\cdot 10$$

$\downarrow$ 10 $\qquad\qquad \downarrow$ 10

Απο Θ. Ισοδ. ακολ.

$\zeta_\nu \to 10$

$$\varepsilon_\nu = \frac{1^1 + 2^2 + \dots + (\nu-1)^{\nu-1} + \nu^\nu}{\nu^\nu}$$

$$1 \le \varepsilon_\nu \le \frac{(\nu-1)(\nu-1)^{\nu-1} + \nu^\nu}{\nu^\nu}$$ ← Δε συγκλίνει στο 1 Αρα δε μπορεί να εφαρμοστει το θεωρ. Ισοδ. Ακολ. με αυτον τον τροπο.

$$= \frac{(\nu-1)^\nu + \nu^\nu}{\nu^\nu} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu + 1 =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^\nu} + 1 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}\cdot\frac{\nu}{\nu-1}} + 1$$

$$1 \le \Sigma_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^{n-2} + (n-1)^{n-1} + n^n}{n^n}$$

$\downarrow$

1

$$\le \frac{(n-2)(n-2)^{n-2} + (n-1)^{n-1} + n^n}{n^n}$$

$$= \frac{(n-2)^{n-1}}{n^{n-1}\cdot n} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}\cdot n} + 1$$

$$\le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + 1 \to 1$$

Απο θεωρ. ισοσ. ακολ.

$\Sigma_n \to 1$

<u>β' τρόπος</u>

$$1 \le \Sigma_n \le \frac{n^1 + n^2 + \cdots + n^{n-1} + n^n}{n^n}$$

$$= \frac{n\left(\frac{n^n - 1}{n-1}\right)}{n^n}$$

$$= \frac{n^{n+1} - n}{n^{n+1} - n^n} = \frac{1 - \frac{1}{n^n}}{1 - \frac{1}{n}} \to 1$$

Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}\, \sin(n^n)}{n+1}$$

$$0 \le |a_n| = \frac{1 \cdot \sqrt{n}\, |\sin(n^n)|}{n+1}$$

$\downarrow$

0

$$\le \frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$ Άρα (Απο θ. ισοσ. ακολ)

$|a_n| \to 0$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Να βρεθεί για τα διάφορα $x, y \in \mathbb{R}$ το όριο της

$$a_n = \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$$

Παρατηρούμε ότι αν $y = -x$
για τα περιττά $n \in \mathbb{N}$ ο παρανομαστής μηδενίζεται
και άρα δεν ορίζεται η $(a_n)_n$

1η περίπτωση $x = y$

$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ άρα $a_n \to 0$

2η περίπτωση $|y| > |x| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| < 1$

$$a_n = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1} \to -1$$

3η περίπτωση

$\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

$$a_n = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n} \to 1$$